1 Proposition

$$\pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \tag{1}$$

2 Démonstration

On va démontrer ce résultat par l'absurde : on suppose donc qu'il existe deux entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que

$$\pi = \frac{p}{q} \tag{2}$$

Définition 2.1 $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, *on pose*

$$I(m,n) \equiv \frac{1}{(\min(m,n))!} \int_0^\pi (qx)^m (p-qx)^n e^{ix}\, dx$$

On note que

- $(p - q\pi) = 0$ d'après (2)
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} I(n,m) &= \frac{1}{(\min(n,m))!} \int_0^\pi (qx)^n (p-qx)^m e^{ix}\, dx \\ &= \frac{1}{(\min(m,n))!} \int_\pi^0 (q(\pi-u))^n (p-q(\pi-u))^m e^{i(\pi-u)} (-\,du) \text{ (avec } u = \pi - x) \\ &= -\frac{1}{(\min(m,n))!} \int_0^\pi (qu)^m (p-qu)^n e^{-iu}\, du \end{aligned}$$

d'où

$$I(n,m) = -\overline{I(m,n)} \tag{3}$$

Proposition 2.1

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, I(m,n) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

Démonstration: On va montrer par récurrence

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall k \in <0,n>, I(k,n-k) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}\text{“}$$

- $I(0,0) = \int_0^\pi e^{ix}\, dx = \left[\frac{e^{ix}}{i}\right]_0^\pi = -i(-1-1) = 2i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

– Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

  –
$$\begin{aligned}
I(0,n+1) &= \int_0^\pi (p-qx)^{n+1} e^{ix}\,dx \\
&= \left[(p-qx)^{n+1}\frac{e^{ix}}{i}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (n+1)(-q)(p-qx)^n \frac{e^{ix}}{i}\,dx \\
&= ip^{n+1} - iq(n+1)I(0,n)
\end{aligned}$$

  D'après $\mathcal{P}(n)$, $I(0,n) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ donc $I(0,n+1) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

  – Soit $k \in \mathbb{N}, 1 \le k < \frac{n+1}{2}$. Ceci implique en particulier que
$$k \le n-k$$
  et donc que
$$\min(k,n-k) = k$$

$$\begin{aligned}
I(k,n+1-k) &= \frac{1}{k!}\int_0^\pi (qx)^k (p-qx)^{n+1-k} e^{ix}\,dx \\
&= \frac{1}{k!}\Bigg(\left[(qx)^k(p-qx)^{n+1-k}\frac{e^{ix}}{i}\right]_0^\pi \\
&\quad - \int_0^\pi \{kq(qx)^{k-1}(p-qx)^{n+1-k} \\
&\qquad + (qx)^k(n+1-k)(-q)(p-qx)^{n-k}\}\frac{e^{ix}}{i}\,dx\Bigg) \\
&= \frac{iq}{(k-1)!}\int_0^\pi (qx)^{k-1}(p-qx)^{n+1-k}e^{ix}\,dx \\
&\quad - \frac{iq(n+1-k)}{k!}\int_0^\pi (qx)^k (p-qx)^{n-k} e^{ix}\,dx \\
&= iqI(k-1,n+1-k) - iq(n+1-k)I(k,n-k)
\end{aligned}$$

  D'après $\mathcal{P}(n)$, $I(k-1,n+1-k) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ et $I(k,n-k) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ donc $I(k,n+1-k) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

  – Si, en outre, $n+1$ est pair, on pose $n' = \frac{n+1}{2}$. On remarque que $n' \ge 1$.

$$\begin{aligned}
I(n',n') &= \frac{1}{n'!}\int_0^\pi (qx)^{n'}(p-qx)^{n'}e^{ix}\,dx \\
&= \frac{1}{n'!}\Bigg(\left[(qx)^{n'}(p-qx)^{n'}\frac{e^{ix}}{i}\right]_0^\pi \\
&\quad -\int_0^\pi \{n'q(qx)^{n'-1}(p-qx)^{n'} \\
&\qquad +(qx)^{n'}n'(-q)(p-qx)^{n'-1}\}\frac{e^{ix}}{i}\,dx\Bigg) \\
&= \frac{iq}{(n'-1)!}\int_0^\pi (qx)^{n'-1}(p-qx)^{n'}e^{ix}\,dx \\
&\quad -\frac{iq}{(n'-1)!}\int_0^\pi (qx)^{n'}(p-qx)^{n'-1}e^{ix}\,dx \\
&= iqI(n'-1,n') - iqI(n',n'-1)
\end{aligned}$$

Or $n'+n'-1 = 2n'-1 = n$; d'après $\mathcal{P}(n)$, $I(n'-1,n') \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ et $I(n',n'-1) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ donc $I(n',n') \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

On a donc montré que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$k \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow I(k,n+1-k) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \tag{4}$$

Or, d'après (3), page 1, $\forall k \in \mathbb{N}$, si $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n+1$,

$$I(k,n+1-k) = -\overline{I(n+1-k,k)}$$

avec $0 \leq n+1-k \leq \frac{n+1}{2}$. D'après (4),

$$I(k,n+1-k) = -\overline{I(n+1-k,k)} \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

Finalement, $\forall k \in <0,n+1>$, $I(k,n+1-k) \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Définition 2.2 $\forall n \in \mathbb{N}$, *on définit*

$$I(n) \equiv \frac{1}{n!}\int_0^\pi (qx)^n(p-qx)^n \sin x\,dx \tag{5}$$

Proposition 2.2 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I(n) \in \mathbb{N}^* \tag{6}$$

Démonstration:

On remarque que

- $I(n) = \Im(I(n,n))$, où $\Im(z)$ note la partie imaginaire du nombre complexe z. Donc, d'après la proposition 2.1, page 1,

$$I(n) \in \mathbb{Z}$$

- Par ailleurs

  - $\forall x \in [0,\pi]$, $(qx)^n(p-qx)^n \sin x \geq 0$
  - $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, $(qx)^n(p-qx)^n \sin x \geq q^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n q^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$

  donc

$$I(n) \geq \frac{1}{n!}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{p}{4}\right)^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2}\, dx > 0$$

Par conséquent, $I(n) \in \mathbb{Z}$ et $I(n) > 0$, donc

$$I(n) \in \mathbb{N}^*$$

Proposition 2.3

$$\lim_{n\to+\infty} I(n) = 0 \tag{7}$$

Démonstration: Immédiat. Par exemple, $I(n) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} I(n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^\pi (qx)^n(p-qx)^n \sin x\, dx \\ &\leq \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(qx(p-qx))^n}{n!}\, dx \\ &\leq \int_0^\pi e^{qx(p-qx)}\, dx < +\infty \end{aligned}$$

donc, en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} I(n) = 0$$

Démonstration de la proposition 1:

Sous l'hypothèse (2), on a montré que la suite $(I(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux propriétés suivantes : d'après (6), $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I(n) \in \mathbb{N}^*$$

et, d'après (7)

$$\lim_{n \to +\infty} I(n) = 0$$

Or, ces deux conclusions sont incompatibles : il n'existe pas de suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ convergeant vers 0.

On a donc démontré par l'absurde que

$$\pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$