1 Définition, notation et rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Rappel :
Soit $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$, soit $\mu \in \mathbb{R}$. On définit le *mouvement brownien drifté* $\left(W_t^{(\mu)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ par

$$\left(W_t^{(\mu)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+} \equiv (W_t + \mu t)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

et sa borne supérieure $\left(M_t^{(\mu)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ par

$$\left(M_t^{(\mu)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+} \equiv \left(\sup_{s\in[0,t]} W_s^{(\mu)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

D'après le théorème de Girsanov, $(W_t^{(\mu)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \equiv e^{-\mu W_t - \frac{\mu^2}{2}t} \tag{1}$$

Définition 1.1 *On définit le premier temps d'atteinte d'un point $m \in \mathbb{R}$ par le mouvement brownien drifté $W^{(\mu)}$, $\tau_m^{(\mu)}$, par*

$$\begin{aligned} \tau_m^{(\mu)} &\equiv \inf\{t \in \mathbb{R}^+ | W_t^{(\mu)} \geq m\} \\ &\equiv +\infty \text{ si l'ensemble précédent est vide} \end{aligned}$$

On rappelle que
- $\tau_m^{(\mu)}$ est un temps d'arrêt fini presque-sûrement, *i.e.*

$$\mathbb{P}(\tau_m^{(\mu)} < +\infty) = 1$$

- $\forall m \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\{\tau_m^{(\mu)} \leq t\} = \{M_t^{(\mu)} \geq m\} \tag{2}$$

Définition 1.2 *Si τ est un temps d'arrêt fini presque-sûrement, on rappelle que*

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{A \in \mathcal{F} | \forall t \in \mathbb{R}^+, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

est une tribu appelée filtration arrêtée.

Proposition 1.1 (Propriété de Markov forte) *Si* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un mouvement brownien sous* $\mathbb{P}$*, si* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une filtration adaptée et si* τ *est un temps d'arrêt pour* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *alors, sur l'événement* $\{\tau < +\infty\}$*, le processus*

$$(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

est un mouvement brownien, indépendant de $\mathcal{F}_\tau$*.*

En particulier, pour toute fonction g $\mathbb{P}$*-mesurable, pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\mathbb{I}_{\tau\leq t}g(W_t)\right) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\mathbb{I}_{\tau\leq t}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(g(W_\tau + \tilde{W}_{t-\tau}|\mathcal{F}_\tau)\right)\right) \tag{3}$$

où

$$(\tilde{W}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

est un mouvement brownien, indépendant de $\mathcal{F}_\tau$*.*

Remarque : Soit $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$. Alors $(-W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est également un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$, donc, en particulier, pour toute fonction f $\mathbb{P}$-mesurable, $\forall u \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left(f(W_u)\right) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(f(-W_u)\right) \tag{4}$$

Définition 1.3 *Par la suite, on note* $x \mapsto x^+$ *l'application réelle qui, à tout réel* x*, associe sa partie positive* $\max(x, 0)$*.*

2 Détermination de la loi jointe de $\left(W_t^{(\mu)}, M_t^{(\mu)}\right)$

On pose

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &\equiv \{(w,m)\in\mathbb{R}^2; m<0\} \\
\Gamma_2 &\equiv \{(w,m)\in\mathbb{R}^2; w\geq 0; 0\leq m<w\} \\
\Gamma_3 &\equiv \{(w,m)\in\mathbb{R}^2; m\geq w^+\}
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont disjoints deux à deux et que leur réunion est égale à $\mathbb{R}^2$.

Soit $(w,m)\in\mathbb{R}^2$.

2.1 Sur Γ_1 : w quelconque, $m < 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)} \leq w\}} \mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)} \leq m\}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)} \leq w\}} \mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)} < 0\}}\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

car, $\forall t \in \mathbb{R}^+, M_t^{(\mu)} \geq 0$.

Donc

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) = 0 \qquad (5)$$

2.2 Sur Γ_2 : $w \geq 0$, $m \in [0, w[$

On remarque que, $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$M_t^{(\mu)} \geq W_t^{(\mu)}$$

donc si $W_t^{(\mu)} \geq w$

$$M_t^{(\mu)} \geq w > m$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)} \geq w\}} \mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)} \leq m\}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)} > m\}} \mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)} \leq m\}}\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) = 0 \qquad (6)$$

2.3 Sur Γ_3 : w quelconque, $m \geq w^+$

On définit

$$f(w, m) \equiv \mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m)$$

$$\begin{aligned}
f(w,m) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)}\geq m\}}\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\leq w\}}\right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\leq w\}}\right) \text{ d'après (2)} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\leq w\}}e^{\mu W_t+\frac{\mu^2}{2}t}\right) \text{ par définition de } \mathbb{Q}\text{, cf. (1)} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\leq w\}}e^{\mu W_t^{(\mu)}-\frac{\mu^2}{2}t}\right) \text{ par définition de } W_t^{(\mu)} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\leq w\}}e^{\mu W_t^{(\mu)}-\frac{\mu^2}{2}t}|\mathcal{F}_{\tau_m^{(\mu)}})\right) \qquad (7) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}}\leq w\}}e^{\mu(m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}})-\frac{\mu^2}{2}t})\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

où $(\tilde{W}_t^{(\mu)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$, d'après (3).

$$\begin{aligned}
f(w,m) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}}\leq w\}}e^{\mu(m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}})-\frac{\mu^2}{2}t})\right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{m-\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}}\leq w\}}e^{\mu(m-\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}})-\frac{\mu^2}{2}t})\right) \text{ d'après (4)} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{2m-(m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}})\leq w\}}e^{\mu(2m-(m+\tilde{W}^{(\mu)}_{t-\tau_m^{(\mu)}}))-\frac{\mu^2}{2}t})\right) (9) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{I}_{\{2m-W_t^{(\mu)}\leq w\}}e^{\mu(2m-W_t^{(\mu)})-\frac{\mu^2}{2}t}|\mathcal{F}_{\tau_m^{(\mu)}})\right) \qquad (10)
\end{aligned}$$

Le passage de (9) à (10) s'obtient par analogie avec le passage de (7) à (8), en utilisant à nouveau (3).

$$\begin{aligned}
f(w,m) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{\tau_m^{(\mu)}\leq t\}}\mathbb{I}_{\{2m-W_t^{(\mu)}\leq w\}}e^{\mu(2m-W_t^{(\mu)})-\frac{\mu^2}{2}t}\right) \\
&= e^{2\mu m}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{M_t^{(\mu)}\geq m\}}\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\geq 2m-w\}}e^{-\mu W_t^{(\mu)}-\frac{\mu^2}{2}t}\right)
\end{aligned}$$

On remarque que, comme $m \geq w$,

$$W_t^{(\mu)} \geq 2m-w \Rightarrow W_t^{(\mu)} \geq m \Rightarrow M_t^{(\mu)} \geq m$$

donc

$$f(w,m) = e^{2\mu m}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)}\geq 2m-w\}}e^{-\mu W_t^{(\mu)}-\frac{\mu^2}{2}t}\right)$$

On définit la probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ par

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \equiv e^{-\mu W_t^{(\mu)} - \frac{\mu^2}{2}t}$$

On a alors, par définition,

$$\begin{aligned} f(w,m) &= e^{2\mu m}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\mathbb{I}_{\{W_t^{(\mu)} \geq 2m-w\}}\right) \\ &= e^{2\mu m}\tilde{\mathbb{Q}}\left(W_t^{(\mu)} \geq 2m-w\right) \end{aligned}$$

$(W_t^{(\mu)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ donc, d'après le théorème de Girsanov à nouveau, $(W_t^{(\mu)}+\mu t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sous $\tilde{\mathbb{Q}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(w,m) &= e^{2\mu m}\tilde{\mathbb{Q}}\left(\frac{W_t^{(\mu)}+\mu t}{\sqrt{t}} \geq \frac{2m-w+\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\ &= e^{2\mu m}\left(1-\mathcal{N}\left(\frac{2m-w+\mu t}{\sqrt{t}}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m) = e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\frac{w-2m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \tag{11}$$

3 Compléments

Proposition 3.1 (Loi du brownien drifté)

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq x) = \mathcal{N}\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \tag{12}$$

Démonstration : Comme $\forall t \in \mathbb{R}^+, M_t^{(\mu)} \geq 0$, on vérifie bien que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, en posant $w = x$ et $m = 0$ dans (11),

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq x) = \mathcal{N}\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)$$

Proposition 3.2 (Loi du maximum d'un brownien drifté)

$$\mathbb{P}(M_t^{(\mu)} \geq x) = e^{2\mu x}\mathcal{N}\left(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{N}\left(\frac{-x+\mu t}{\sqrt{t}}\right) \tag{13}$$

Démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on remarque que

$$\mathbb{P}(M_t^{(\mu)} \geq x) = \mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq x; M_t^{(\mu)} \geq x) + \mathbb{P}(W_t^{(\mu)} > x; M_t^{(\mu)} \geq x)$$

Comme

$$W_t^{(\mu)} > x \Rightarrow M_t^{(\mu)} \geq x$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_t^{(\mu)} > x; M_t^{(\mu)} \geq x) &= \mathbb{P}(W_t^{(\mu)} > x) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{-x+\mu t}{\sqrt{t}}\right) \text{ d'après (12)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant $w = m = x$ dans (11), on obtient,

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq x; M_t^{(\mu)} \geq x) = e^{2\mu x}\mathcal{N}\left(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)$$

En réunissant les deux résultats, on trouve finalement

$$\mathbb{P}(M_t^{(\mu)} \geq x) = e^{2\mu x}\mathcal{N}\left(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{N}\left(\frac{-x+\mu t}{\sqrt{t}}\right)$$

Proposition 3.3 (Loi du maximum d'un brownien non drifté) *Les processus $(M_t^{(0)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(|W_t^{(0)}|)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ont la même loi.*

Démonstration : Dans le cas du brownien sans drift, i.e. $\mu = 0$ dans (13),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_t^{(0)} \geq x) &= 2\mathcal{N}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= 2\mathbb{P}(W_t^{(0)} \geq x) \\ &= \mathbb{P}(|W_t^{(0)}| \geq x) \end{aligned}$$

4 Formulaires

Pour tout $(w, m) \in \mathbb{R}^2$, on peut à présent déduire des résultats (5), (6), (11), (12) et (13) l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m)$, $\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m)$, $\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m)$ et $\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \geq m)$.

Ainsi, sur Γ_1,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& 0 \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& 0 \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{w-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{-w+\mu t}{\sqrt{t}}\right)
\end{array}$$

Sur Γ_2,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{-m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& 0 \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{w-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\dfrac{m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{-m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{-w+\mu t}{\sqrt{t}}\right)
\end{array}$$

Sur Γ_3,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{w-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{w-2m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) &=& \mathcal{N}\left(\dfrac{m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\dfrac{w-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
&& +e^{2\mu m}\left(\mathcal{N}\left(\dfrac{w-2m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\dfrac{-m-\mu t}{\sqrt{t}}\right)\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{w-2m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \geq m) &=& e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{-m-\mu t}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{N}\left(\dfrac{-m+\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\
&& -e^{2\mu m}\mathcal{N}\left(\dfrac{w-2m-\mu t}{\sqrt{t}}\right)
\end{array}$$

5 Densité de probabilité

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$. Pour tout $(w,m) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $\varphi_t^{(\mu)}(w,m)$ définie par, pour tout $(A,B) \in \mathcal{B}^2$,

$$\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \in A; M_t^{(\mu)} \in B) \equiv \int_{(w,m)\in A\times B} \varphi_t^{(\mu)}(w,m)\, dw\, dm$$

On rappelle que le calcul de $\varphi_t^{(\mu)}$ se déduit de celui des probabilités précédentes par, $\forall (w,m) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\varphi_t^{(\mu)}(w,m) &= \frac{d^2}{dw\, dm}\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \leq m) \\
&= -\frac{d^2}{dw\, dm}\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \leq m) \\
&= -\frac{d^2}{dw\, dm}\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \leq w; M_t^{(\mu)} \geq m) \\
&= \frac{d^2}{dw\, dm}\mathbb{P}(W_t^{(\mu)} \geq w; M_t^{(\mu)} \geq m)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (w,m) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi_t^{(\mu)}(w,m) &= \mathbb{I}_{\{m \geq w^+\}} \frac{2(2m-w)}{\sqrt{t}} e^{2\mu m} \frac{e^{-\frac{(2m-w+\mu t)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \\
&= \mathbb{I}_{\{m \geq w^+\}} \frac{2(2m-w)}{\sqrt{t}} e^{\mu w - \frac{\mu^2 t}{2}} \frac{e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}
\end{aligned}$$

6 Application : pricing d'options dans le cadre du modèle de Black-Scholes

On veut calculer le prix, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, d'un *up-and-out call*, c'est-à-dire d'une option d'achat avec une barrière supérieure désactivante. On note la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}$, le spot S_0, le strike K, le taux d'intérêt sans risque r, la volatilité σ, la maturité T et la barrière B. On suppose évidemment que $B > K$ et que $B > S_0$, sinon le prix est assez simple à calculer. . . On pose

$$\begin{aligned}
\mu &\equiv \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \\
k &\equiv \frac{K}{S_0} \\
b &\equiv \frac{B}{S_0}
\end{aligned}$$

Le cours de l'action, sous $\mathbb{P}$, est modélisé par, $\forall t \in [0,T]$

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$. Dans ce cadre, le prix $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S_0, K, r, T, \sigma, B)$ de cette option vaut

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left((S_T-K)^+\mathbb{I}_{\{(\sup_{0\le t\le T} S_t)\le B\}}\right)\\
&= S_0 e^{-rT}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\sigma w}-k)^+\,\mathbb{I}_{\{m\le\frac{\ln b}{\sigma}\}}\varphi_T^{(\mu)}(w,m)dw\,dm\\
&= S_0 e^{-rT}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\sigma w}-k)\,\mathbb{I}_{\{w\ge\frac{\ln k}{\sigma}\}}\mathbb{I}_{\{w^+\le m\le\frac{\ln b}{\sigma}\}}\frac{2(2m-w)}{\sqrt{T}}e^{\mu w-\frac{\mu^2 T}{2}}\frac{e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dw\,dm\\
&= S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}}\int_{w=\frac{\ln k}{\sigma}}^{\frac{\ln b}{\sigma}}\frac{2\,(e^{\sigma w}-k)}{\sqrt{T}}e^{\mu w}\left(\int_{m=w^+}^{\frac{\ln b}{\sigma}}(2m-w)\frac{e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dm\right)dw\\
&= S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}}\int_{w=\frac{\ln k}{\sigma}}^{\frac{\ln b}{\sigma}}\left[-\frac{T}{2}\frac{e^{-\frac{(2m-w)^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}\right]_{m=w^+}^{\frac{\ln b}{\sigma}}\frac{2\,(e^{\sigma w}-k)}{\sqrt{T}}e^{\mu w}\,dw\\
&= \frac{S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{w=\frac{\ln k}{\sigma}}^{\frac{\ln b}{\sigma}}\left(e^{-\frac{(2w^+-w)^2}{2T}}-e^{-\frac{(2\frac{\ln b}{\sigma}-w)^2}{2T}}\right)\frac{(e^{\sigma w}-k)}{\sqrt{T}}e^{\mu w}\,dw
\end{aligned}$$

On remarque que, pour tout réel x, $2x^+ - x = |x|$ et donc $(2x^+ - x)^2 = x^2$.

$$\mathcal{C} = \frac{S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{w=\frac{\ln k}{\sigma}}^{\frac{\ln b}{\sigma}}\left(e^{-\frac{w^2}{2T}}-e^{-\frac{(2\frac{\ln b}{\sigma}-w)^2}{2T}}\right)\frac{(e^{\sigma w}-k)}{\sqrt{T}}e^{\mu w}\,dw$$

On pose $v = \frac{w}{\sqrt{T}}$.

$$\mathcal{C} = \frac{S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{v=\frac{\ln k}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}}(e^{-\frac{v^2}{2}}-e^{-\frac{(2\frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}-v)^2}{2}})(e^{\sigma\sqrt{T}v}-k)e^{\mu\sqrt{T}v}\,dv \quad (14)$$

On introduit alors la fonction f définie par

$$f(a,b,\alpha,\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}e^{\beta x}\,dx \quad (15)$$

On calcule aisément que

$$f(a,b,\alpha,\beta) = e^{\frac{\beta^2+2\alpha\beta}{2}}\left(\mathcal{N}(\alpha+\beta-a)-\mathcal{N}(\alpha+\beta-b)\right) \quad (16)$$

En utilisant (15) et (16) dans (14), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= S_0 e^{-rT-\frac{\mu^2 T}{2}} \Big(f(\frac{\ln k}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, 0, (\mu+\sigma)\sqrt{T}) \\ &\quad - k.f(\frac{\ln k}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, 0, \mu\sqrt{T}) \\ &\quad - f(\frac{\ln k}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, 2\frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, (\mu+\sigma)\sqrt{T}) \\ &\quad + k.f(\frac{\ln k}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, 2\frac{\ln b}{\sigma\sqrt{T}}, \mu\sqrt{T}) \Big)\end{aligned}$$

Après simplification, en remarquant que $2\mu\sigma + \sigma^2 = 2r$ et que $\mu + \sigma = \frac{r+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(S_0, K, r, T, \sigma, B) &= S_0 \left(\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - \mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{B} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \right) \\ &\quad -Ke^{-rT} \left(\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - \mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{B} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \right) \\ &\quad -B(\frac{B}{S_0})^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left(\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{B^2}{S_0K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - \mathcal{N}(\frac{\ln\frac{B}{S_0} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \right) \\ &\quad +\frac{S_0Ke^{-rT}}{B}(\frac{B}{S_0})^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left(\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{B^2}{S_0K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - \mathcal{N}(\frac{\ln\frac{B}{S_0} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \right)\end{aligned}$$

En se souvenant que, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \mathcal{N}(x) \leq 1$$

que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$$

et que

$$\mathcal{N}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x}$$

on vérifie bien que, si l'on fait tendre B vers l'infini, on a

$$\mathcal{C}(S_0, K, r, T, \sigma, B) \underset{B\to+\infty}{\to} S_0\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}})$$

qui est bien la formule d'un call européen simple dans le cadre du modèle de Black-Scholes